Büschel von Raumkurven 4. Ordnung II. Art mit zwei stationären Tangenten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Fakultät

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

Gustav Frauenfelder

aus Henggart.

Begutachtet von
Herrn Prof. Dr. A. Weiler.

Zürich
Druck von Zürcher & Furrer
1903.

Büschel

von Raumkurven 4. Ordnung II. Art mit zwei stationären Tangenten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Fakultät

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

Gustav Frauenfelder

aus Henggart.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Begutachtet von
Herrn Prof. Dr. A. Weiler.

Zürich

Druck von Zürcher & Furrer

1903.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. W. Fiedler

gewidmet.

Der Verfasser.

I. Einleitung.

Durch die Raumkurve 4. Ordnung II. Art, R_4 [1]), geht nur *eine* Fläche 2. Ordnung, das Trisekantenhyperboloid H. Ihre Tangentenfläche ist gemeinsame Developpable einer zweiten Fläche 2. Ordnung, deren Tangentialebenen R_4 in äquianharmonischen Punkten schneiden, und einer Fläche 3. Ordnung 4. Klasse, deren Ebenen R_4 in harmonischen Punkten treffen und von welcher R_4 Haupttangentenkurve ist.

Eine ausgezeichnete Spezialität dieser Kurve ist R_4 *mit zwei stationären Tangenten.* Sie entsteht, wenn von den vier Wendepunkten sich je zwei vereinigen. Die Schnittlinie zweier aufeinanderfolgender Wendeebenen enthält dann drei benachbarte Punkte von R_4, ist also stationäre Tangente. Hat R_4 reelle stationäre Tangenten, so sind sie die einzigen Erzeugenden des Trisekantenhyperboloids, die drei reelle Kurvenpunkte tragen. Durch die Vereinigung von je zwei imaginären Wendepunkten erhalten wir R_4 mit imaginären stationären Tangenten; sämtliche Trisekanten enthalten dann entweder drei reelle Punkte von R_4, oder die ganze Kurve ist imaginär.

Die *Doppelkurve* der Tangentenfläche, die bei der allgemeinen R_4 von 6. Ordnung 4. Klasse ist, zerfällt, wenn R_4 zwei stationäre Tangenten hat, in diese Tangenten und in eine Raumkurve 4. Ordnung II. Art. Die Tangentenfläche der Doppelkurve erzeugt dann wieder eine Kurve der nämlichen Art; in dieser Weise erhalten wir ein ganzes Büschel solcher Kurven. *Unsere Aufgabe besteht nun darin, die gegenseitige Abhängigkeit dieser Kurven und der zu ihnen in invarianter Beziehung stehenden Gebilde zu untersuchen.*

---

[1]) Von den vielen Arbeiten über diese Kurve ist diejenige von Herrn Rohn (Leipziger Berichte 1890/91) die vollständigste; sie enthält die gesamte Theorie der allgemeinen R_4 und behandelt einlässlich die verschiedenen Spezies und Spezialfälle; einzig R_4 mit *einer* stationären Tangente ist nicht berücksichtigt.

Die allgemeine R_4 besitzt, wie schon Bertini [1]) gefunden hat, einen ausgezeichneten Punkt, den *Hauptpunkt.* Die drei durch ihn gehenden Bisekanten sind die Schnittlinien der Schmiegungsebenen der jeweilen auf einer solchen liegenden Kurvenpunkte und bilden mit ihren Polaren bezüglich H das *Haupttetraeder* von R_4. Je eine solche Sehne und ihre Polare sind die Achsen einer *geschart involutorischen Raumtransformation,* durch die R_4 in sich selbst übergeführt wird. Mit Hülfe dieser geschart involutorischen, die Kurve R_4 enthaltenden Räume werden wir die Hauptergebnisse unserer Untersuchung gewinnen. Es ist darum angezeigt, auch unserseits nachzuweisen, dass jede Bisekante von R_4, welche die Schmiegungsebenen ihrer Kurvenpunkte enthält, einen geschart involutorischen Raum von genannter Eigenschaft erzeugt.

Wir gehen von der von Emil Weyr [2]) bewiesenen Tatsache aus, dass jede Bisekante a Doppelgerade einer Regelfläche 3. Grades ist, welche aus den die Gerade a schneidenden Bisekanten besteht. Sind P und Q die auf a liegenden Kurvenpunkte und enthält a die beiden Schmiegungsebenen, so sind die Tangenten von R_4 in P und Q und die durch diese Punkte gehenden Trisekanten als die Bisekanten aufzufassen, welche a in P und Q resp. treffen. Somit ist die Polare a^* von a bezüglich H die einfache Leitgerade der Regelfläche, und der die letztere enthaltende geschart involutorische Raum der Achsen a und a^* muss auch R_4 als sich selbst entsprechend enthalten, da die auf jeder der erwähnten Bisekanten liegenden Kurvenpunkte harmonisch getrennt sind durch die Schnittpunkte der Bisekante mit a und a^*. Selbstverständlich gehören dann auch alle zu R_4 in invarianter Beziehung stehenden Gebilde dem genannten Raume an.

Hat nun R_4 zwei stationäre Tangenten, so gehört sie unendlich vielen geschart involutorischen Räumen an, wie sich aus folgendem ergibt. R_4 projiziert sich aus irgend einem ihrer Punkte als rationale C_3 mit drei in gerader Linie liegenden Inflexionspunkten; d. h. durch jeden Punkt P von R_4 gehen drei nicht benachbarte Schmiegungsebenen, deren Oskulationspunkte in einer durch P gehenden Ebene liegen. Sind zwei stationäre Tangenten da, so projizieren sich ihre Oskulationspunkte, die *Streckungspunkte,*

---

[1]) Bertini, Istituto Lombardo, 1872.

[2]) Emil Weyr, Wiener Berichte, Bd. 73, Febr. 1876.

als Inflexionspunkte; somit geht durch einen Kurvenpunkt P nur noch eine einzige nicht benachbarte Schmiegungsebene, deren Oskulationspunkt Q mit P und den Streckungspunkten in einer Ebene liegt; aus letzterem Umstand folgt weiter, dass auch die Schmiegungsebene von P durch Q geht. P und Q entsprechen sich vertauschbar und wir haben, wenn wir die Verbindungsgerade der Streckungspunkte *Hauptachse* heissen, das bekannte Resultat:

Die Punkte einer R_4 mit zwei stationären Tangenten bilden eine Involution derart, dass jeder Punkt eines Paares in der Schmiegungsebene des andern liegt und ihre Verbindungsgerade als die Schnittlinie ihrer Schmiegungsebenen die Hauptachse schneidet. Die Streckungspunkte sind die Doppelpunkte der Involution.

Hieraus ergibt sich, dass jeder Punkt der Hauptachse Hauptpunkt ist; durch jeden gehen drei Bisekanten mit den Schmiegungsebenen ihrer Kurvenpunkte. Dabei müssen wir auch die zwei durch die Hauptachse und je eine stationäre Tangente gehenden Ebenen, welche ebenfalls drei aufeinanderfolgende Punkte von R_4 enthalten, als Schmiegungsebenen der Kurve ansehen. Es sind demnach sowohl die Hauptachse und ihre Polare bezüglich H als auch jede die Hauptachse schneidende Bisekante und ihre Polare Achsen je eines geschart involutorischen Raumes, der R_4 enthält. Daraus folgt:

R_4 ist Haupttangentenkurve der Regelfläche 3. Grades, F_3, die von den die Hauptachse schneidenden Bisekanten gebildet wird.

Denn die Tangenten von R_4 in den zwei Punkten einer Erzeugenden von F_3 sind sich selbst entsprechende Gerade in dem geschart involutorischen Raume, von welchem die Erzeugende die eine Achse ist und dessen andere Achse F_3 nicht angehören kann, da sie nicht Bisekante von R_4 ist. Als sich selbst entsprechende Gerade können genannte Tangenten F_3 nicht mehr treffen, sind also Haupttangenten. Die stationären Tangenten sind die developpablen Elemente von F_3; sind sie reell, so enthält nur die eine von den beiden in einem Punkte der Hauptachse sich treffenden Erzeugenden reelle Kurvenpunkte, andernfalls beide. H enthält die developpablen Elemente von F_3, die mit R_4 die Gesamtdurchdringung der beiden Flächen bilden.

II. Das Kurvenbüschel.

Die Doppelkurve D_4 der Tangentenfläche unserer R_4 ist wieder eine Raumkurve 4. Ordnung II. Art. Die stationären Tangenten von R_4 und deren Oskulationspunkte gehören als sich selbst duale Singularität auch D_4 an. Sie ist ebenfalls Haupttangentenkurve einer Regelfläche 3. Grades und zwar muss diese mit F_3 die beiden Leitgeraden und die developpablen Elemente gemein haben. Regelflächen solcher Eigenschaft gibt es aber einfach unendlich viele.

Geben wir nämlich allgemein zwei Windschiefe g_1 und g_2 und vier weitere Gerade, a_1, a_2; b_1, b_2, die g_1 paarweise und g_2 einzeln treffen, so bestimmen die zwei Paare von Schnittpunkten auf g_2 eine Involution, zu der die Punktreihe auf g_1 projektiv sein soll. Von dieser haben wir jedoch nur zwei Punkte; greifen wir also ein drittes Paar der Involution auf g_2 heraus, so können wir es mit einem beliebigen Punkte P von g_1 verbinden, wodurch dann eine Regelfläche 3. Grades eindeutig bestimmt ist. Lassen wir P die Punktreihe g_1 durchlaufen, so erhalten wir ein Büschel von Regelflächen, das durch die sechs Geraden gelegt werden kann. Die Doppelgerade g_1 erhält in der Durchdringung die Ordnung vier.

In unserem speziellen Falle sind von der Involution die Doppelelemente gegeben. Wir behaupten:

Die Fläche F_3^*, von welcher die Doppelkurve D_4 Haupttangentenkurve ist, besteht aus den Polaren der Erzeugenden der Fläche F_3, von welcher R_4 Haupttangentenkurve ist, bezüglich der die Kurven tragenden Hyperboloide.

t_1 und t_2 (Fig. 1) seien die stationären Tangenten, a_1 und a_2 ein Paar Erzeugende von F_3 und a_1^*, a_2^* ihre Polaren bezüglich H. Letztere bestimmen die Regelfläche F_3^*, die mit F_3 die Leitgeraden und die developpablen Elemente gemein hat und deren Erzeugende notwendig die Polaren der Erzeugenden von F_3 bezüglich H sind; wir heissen darum F_3^* die *Polarenfläche* von F_3; umgekehrt ist diese die Polarenfläche jener. Die Geraden g_1, g_2; a_1, a_2^*; a_2, a_1^* bilden ein Haupttetraeder von R_4. Die geschart involutorischen Räume der Achsen a_1, a_2^* und a_2, a_1^* enthalten nicht nur R_4, F_3 und D_4 als sich selbst entsprechende Gebilde, sondern auch F_3^*. Und da F_3 allen früher genannten geschart involutorischen Räumen an-

angehört, so gilt dies auch von ihrer Polarenfläche. Dagegen kann keine aller übrigen Flächen des Büschels durch diese Transformationen in sich selbst übergeführt werden. Verbinden wir nämlich die Punkte L_1 und L_2 von g_2 mit dem beliebigen Punkte B_1 von g_1, so wird durch die beiden obigen Transformationen B_1 in den bezüglich A und A^* konjugiert harmonischen Punkt B_2 übergeführt,

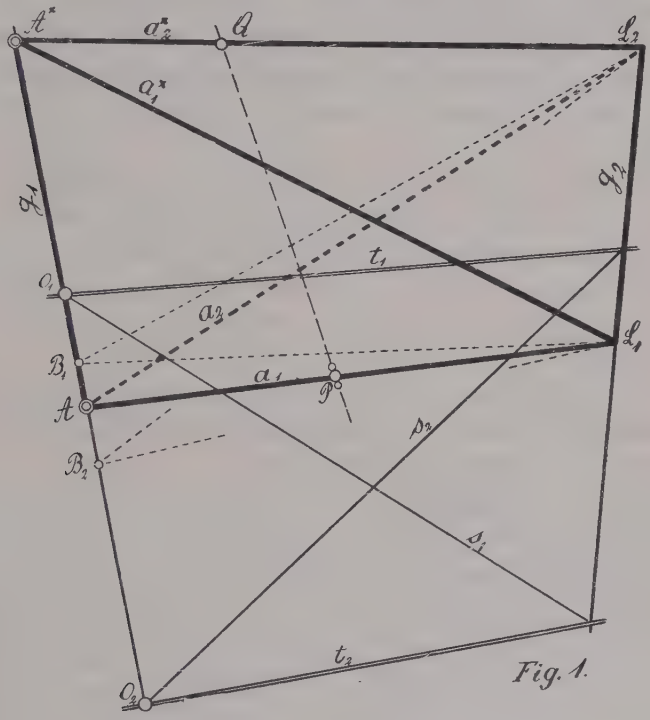


Fig. 1.

und aus der durch B_1 bestimmten Regelfläche wird die durch B_2 gegebene.

Selbstverständlich sind die Erzeugenden von F_3^* auch die Polaren der Erzeugenden von F_3 bezüglich des die Doppelkurve D_4 tragenden Hyperboloids H^*; denn dieses hat mit H die zwei Paare Erzeugenden in den beiden Streckungspunkten gemein.

Ferner ergibt sich:

Die Kurve V_4, in welcher die Tangentenfläche von R_4 die Fläche 2. Ordnung, deren Tangentialebenen R_4 in äquianharmonischen Punkten schneiden, berührt, ist ebenfalls Haupttangentenkurve von F_3^*.

Bekanntlich hat V_4, die wir kurz die *Berührungskurve* von R_4 heissen wollen, die nämlichen stationären Tangenten und Streckungspunkte wie R_4 und D_4; auch sie wird durch obige Transformationen in sich übergeführt, muss also, da sie F_3 nicht angehören kann, Haupttangentenkurve von F_3^* sein.

Jede Tangente von R_4 enthält zwei Punkte von D_4, aber drei von F_3^*, die Gesamtheit dieser dritten Punkte ist eben die Kurve V_4, die wir konstruieren, indem wir jede Tangente von R_4 zum Schnitt bringen mit der Polaren der durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden von F_3 bezüglich H. Zugleich ergibt sich:

Auf jeder Tangente von R_4 sind der Berührungspunkt und der Punkt von V_4 harmonisch getrennt durch die Punkte von D_4.

Die Tangentenfläche von D_4 durchdringt sich nun ebenfalls in einer Raumkurve 4. Ordnung, $R_4^{(1)}$, mit den nämlichen stationären Tangenten und Streckungspunkten. Wiederholen wir die vorigen Erörterungen, so gelangen wir zu dem Ergebnis:

Die Doppelkurve $R_4^{(1)}$ der Doppelkurve D_4 von R_4 ist Haupttangentenkurve der nämlichen Regelfläche F_3, von welcher R_4 Haupttangentenkurve ist.

Auch die Berührungskurve $U_4^{(-1)}$ der Doppelkurve D_4 ist Haupttangentenkurve von F_3. Sie bildet mit der doppelt zu zählenden $R_4^{(1)}$ und den je dreifach zu zählenden stationären Tangenten die Gesamtdurchdringung von F_3 mit der Tangentenfläche von D_4. Wir können noch Genaueres über die Lage von $R_4^{(0)}$, so wollen wir die ursprüngliche R_4 fortan bezeichnen, und $R_4^{(1)}$ auf F_3 sagen:

Jede Tangente eines Punktes $P^{(0)}$ von $R_4^{(0)}$ trägt zwei Punkte der Kurve $D_4^{(0)}$, die ihre Tangenten nach einem Punkte $P^{(1)}$ von $R_4^{(1)}$ senden, der mit $P^{(0)}$ auf der nämlichen Erzeugenden a von F_3 liegt.

Denn in der Schmiegungsebene von $R_4^{(0)}$ in $P^{(0)}$ liegen die Erzeugende a und die genannten zwei Tangenten von $D_4^{(0)}$, und da sich diese in der Transformation der Achse a und deren Polaren vertauschbar entsprechen, müssen sie sich notwendig auf a schneiden.

$R_4^{(1)}$ erzeugt dann $D_4^{(1)}$, welche mit der Berührungskurve $V_4^{(0)}$ auf F_3^* liegt; $R_4^{(2)}$, als Doppelkurve von $D_4^{(1)}$, ist wie $U_4^{(1)}$ wieder Haupttangentenkurve von F_3, u. s. w. Wir gelangen zu folgendem Ergebnis:

$R_4^{(0)}$ erzeugt ein vierteiliges Büschel von ihr dualen Raumkurven; zwei der Teilbüschel ... $R_4^{(0)}$, $R_4^{(1)}$, $R_4^{(2)}$, ...; .... $U_4^{(-1)}$, $U_4^{(0)}$, $U_4^{(1)}$, ... sind Haupttangentenkurven von F_3, die andern zwei .... $D_4^{(0)}$, $D_4^{(1)}$, $D_4^{(2)}$, ...; .... $V_4^{(-1)}$, $V_4^{(0)}$, $V_4^{(1)}$, ... sind Haupttangentenkurven von F_3^*.

Die weitere Untersuchung wird noch Näheres über die Lage wie auch über die Abhängigkeit der Kurven von einander geben; zunächst wird sich zeigen:

Wir erhalten zwei Teilbüschel von Hyperboloiden, von welch letztern jedes zwei Kurven trägt; ... $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, ... mit *... $R_4^{(0)}$, $U_4^{(0)}$; $R_4^{(1)}$, $U_4^{(1)}$; $R_4^{(2)}$, $U_4^{(2)}$; ...; dann ... $H^{*(0)}$, $H^{*(1)}$, $H^{*(2)}$, ... mit ... $D_4^{(0)}$, $V_4^{(0)}$; $D_4^{(1)}$, $V_4^{(1)}$; $D_4^{(2)}$, $V_4^{(2)}$; ...*

III. Büschel von Kurven mit reellen stationären Tangenten.

Den Fall, wo R_4 reelle stationäre Tangenten hat, wollen wir zuerst betrachten. g_1, a_1, a_2; g_2, a_1^*, a_2^* (Fig. 1) sind die Kanten eines allen Hyperboloiden gemeinsamen Poltetraeders. Durch kollineare Umformung können wir A zum Mittelpunkt und a_1, a_2, g_1 zu den Achsen x, y, z resp. der Hyperboloide machen. Bezeichnen wir den Abstand der Streckungspunkte O_1, O_2 mit $2c$, den Abstand der auf x liegenden, wie wir annehmen wollen, reellen Punkte P_1 und P_2 von $R_4^{(0)}$ mit $2a$ und endlich den der symmetrischen Punkte der elliptischen Involution auf y mit $2b$, so lautet die Gleichung von $H^{(0)}$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Jetzt ergibt sich unmittelbar, dass die Tangentialebenen von F_3 in P_1 und P_2 aus den stationären Tangenten ein halb so grosses Stück schneiden, wie die Tangentialebenen von H in den genannten Punkten (Fig. 2). Die Tangenten von $R_4^{(0)}$ in P_1 und P_2 enthalten aber die unendlich fernen Punkte von $V_4^{(-1)}$; somit lautet die

Gleichung des von der Tangentenfläche von $R_4^{(0)}$ eingehüllten Hyperboloids $H^{(-1)}$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Bekanntlich enthält jede der beiden Regelflächen 3. Grades zwei Scharen von Haupttangentenkurven, die durch die developpablen Elemente getrennt sind. Das durch diese gelegte Ebenenpaar mit der Doppelgeraden g_1 als Kante scheidet den Raum in zwei Teile. Jeder enthält von den Haupttangentenkurven von F_3 und F_3^* je eine Schar. Wie sich nun aus dem Verlauf der Tangenten von $R_4^{(0)}$ in P_1 und P_2 ergibt, liegen $R_4^{(0)}$ von F_3 und V_4^{-1} von F_3^* in verschiedenen Winkelräumen, während $D_4^{(0)}$ von F_3^* im nämlichen Winkelraum liegt wie $R_4^{(0)}$; $V_4^{(-1)}$ und $D_4^{(0)}$ gehören also verschiedenen Scharen an, ebenso $R_4^{(0)}$ und $U_4^{(-1)}$. $D_4^{(0)}$ hat somit die beiden unendlich fernen Punkte in der $x\,y$-Ebene. Kennen wir die Richtung nach diesen Punkten, so können wir die Gleichung von $H^{*\,(0)}$ aufstellen.

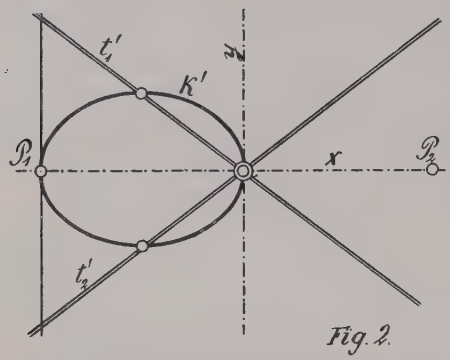


Fig. 2.

Die Parameterdarstellung von R_4 mit zwei stationären Tangenten, bezogen auf das durch die stationären Tangenten und die andern durch die Streckungspunkte gehenden Erzeugenden von H gebildete Tetraeder, lautet wie bekannt:

$$\varrho_1 x_1 = 1\,; \qquad \varrho_2 x_2 = \lambda\,; \qquad \varrho_3 x_3 = \lambda^3\,; \qquad \varrho_4 x_4 = \lambda^4$$

oder bezogen auf unser kartesisches Koordinatensystem:

$$(R_4^{(0)}) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{\varrho_3 x_3 + \varrho_2 x_2}{\varrho_4 x_4 + \varrho_1 x_1} = \frac{\lambda^3 + \lambda}{\lambda^4 + 1} \\ \frac{y}{b} &= \frac{\varrho_3 x_3 - \varrho_2 x_2}{\varrho_4 x_4 + \varrho_1 x_1} = \frac{\lambda^3 - \lambda}{\lambda^4 + 1} \\ \frac{z}{c} &= \frac{\varrho_4 x_4 - \varrho_1 x_1}{\varrho_4 x_4 + \varrho_1 x_1} = \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^4 + 1}\,. \end{aligned}$$

Für die Punkte von $R_4^{(0)}$, deren Tangenten sich im Unendlichen treffen, gilt:

$$\frac{dy}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{b}\frac{dy}{d\lambda} = \frac{(\lambda^4+1)(3\lambda^2-1) - 4\lambda^3(\lambda^3-\lambda)}{(\lambda^4+1)^2}$$

$$\lambda^6 - 3\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\alpha) \qquad \lambda^4 - 4\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}\,.$$

Bezeichnen wir mit $2a^*$ den Abstand der symmetrischen Punkte der elliptischen Involution von $H^{*(0)}$ auf x, so ist

$$\frac{a^*}{c} = \frac{dx}{dz} = \frac{a}{c}\,\frac{(\lambda^4+1)(3\lambda^2+1) - 4\lambda^3(\lambda^3+\lambda)}{8\lambda^3}$$

$$= \frac{a}{c}\,\frac{[(\lambda^4+1)(3\lambda^2-1) - 4\lambda^3(\lambda^3-\lambda)] + 2[(\lambda^4+1) - 4\lambda^4]}{8\lambda^3}\,.$$

Der erste Teil des Zählers ist null.

$$a^* = a\,\frac{1-3\lambda^4}{4\lambda^3} \qquad \text{oder zufolge } (\alpha)$$

$$a^* = a\,\frac{1-3\lambda^2}{\lambda^3}$$

$$\underline{a^* = a\sqrt{2}}$$

also auch $$\underline{b^* = b\sqrt{2}}\,.$$

Somit hat das Hyperboloid $H^{*(0)}$, das $D_4^{(0)}$ und $U_4^{(0)}$, die Berührungskurve von $D_4^{(1)}$ trägt, die Gleichung

$$-\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$(H^{*(0)}) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (-2)\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Dann lautet die Gleichung von $H^{(1)}$, das $R_4^{(1)}$, die Doppelkurve von $D_4^{(0)}$, und $U_4^{(1)}$ trägt [1])

$$(H^{(1)}) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Allgemein:

$H^{(n)}$ mit $R_4^{(n)}$ und $V_4^{(n)}$, d. h. mit $R_4^{(n)}$ und eingehüllt von den Tangenten von $R_4^{(n+1)}$ hat die Gleichung

$$(H^{(n)}) \qquad \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (-2)^{2n}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)}}$$

und $H^{*(n)}$ mit $D_4^{(n)}$ und $U_4^{(n)}$, d. h. mit $D_4^{(n)}$ und eingehüllt von den Tangenten von $D_4^{(n+1)}$ hat die Gleichung

$$(H^{*(n)}) \qquad \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (-2)^{2n+1}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)}}.$$

Für $n = \infty$ werden $H^{(n)}$ und $H^{*(n)}$ zu dem Ebenenpaar

$$c^2 - z^2 = 0;$$

alsdann bestehen sowohl $R_4^{(n)}$ und $D_4^{(n)}$ als auch $V_4^{(n)}$ und $U_4^{(n)}$ aus den developpablen Elementen von F_3 und F_3^* und deren doppelt zu zählenden Leitgeraden g_2.

Von $R_4^{(0)}$ aus können wir das Kurvenbüschel auch nach der andern Seite fortsetzen. Die Rückkehrkante der Doppeldevelopp-pablen von $R_4^{(0)}$ ist $D_4^{(-1)}$; diese erzeugt dann $R_4^{(-1)}$ u. s. w. Lassen wir n derart alle negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so werden $H^{(n)}$ und $H^{*(n)}$ für $n = -\infty$ zu dem Ebenenpaar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

und $R_4^{(n)}$, $D_4^{(n)}$, $V_4^{(n)}$, $U_4^{(n)}$ schrumpfen zu der doppelt zu zählenden Doppelgeraden von F_3 und F_3^* zusammen.

[1]) Dieses Hyperboloid ist also nicht identisch mit dem von den Tangenten von $R_4^{(0)}$ eingehüllten, wie Rohn in der zitierten Arbeit (II. Teil, pag. 17) irrtümlich angibt.

Von jeder der Kurven $R_4^{(n)}$ und $D_4^{(n)}$ kann gesagt werden, sie erzeuge das gesamte Kurvenbüschel; dies gilt aber auch von den Kurven $V_4^{(n)}$ und $U_4^{(n)}$. Wir behaupten nämlich:

Wie $V_4^{(n-1)}$ und $U_4^{(n-1)}$ die Berührungskurven von $R_4^{(n)}$ und $D_4^{(n)}$ resp. sind, so sind auch umgekehrt $R_4^{(n)}$ und $D_4^{(n)}$ die Berührungskurven von V_4^{n+1} und U_4^{n+1}.

Die Doppelkurve von $V_4^{(n)}$ ist Haupttangentenkurve von F_3; sie liegt im nämlichen Winkelraum wie $V_4^{(n)}$ und auf dem Hyperboloid $H^{*(n)}$, ist somit identisch mit $U_4^{(n)}$; die Tangentenfläche dieser Kurve durchdringt sich dann in V_4^{n+1} u. s. w. Ferner umhüllt die Developpable von V_4^n notwendig H^{n-1} in einer Kurve, die Haupttangentenkurve von F_3 ist und nicht im Winkelraum von V_4^n liegen kann, also notwendig mit $R_4^{(n-1)}$ identisch ist. Analog finden wir, dass die Developpable von $U_4^{(n)}$ die Fläche $H^{*(n-1)}$ in $D_4^{(n-1)}$ umhüllt.

Es wird also $H^{(n)}$ von den Tangentenflächen von $R_4^{(n+1)}$ und $V_4^{(n+1)}$ in den Kurven V_4^n und R_4^n resp. berührt. Das Analoge gilt von $H^{*(n)}$. Jede Kurve des Büschels ist Doppelkurve einer solchen Tangentenfläche und zugleich Berührungskurve einer andern.

D_4^n	ist Doppelkurve von	$R_4^{(n)}$	und Berührungskurve von	$U_4^{(n+1)}$
R_4^n	„ „ „	$D_4^{(n-1)}$	„ „ „	$V_4^{(n+1)}$
$V_4^{(n)}$	„ „ „	$U_4^{(n-1)}$	„ „ „	$R_4^{(n+1)}$
$U_4^{(n)}$	„ „ „	V_4^n	„ „ „	D_4^{n+1}.

Im Anschluss an die Gleichungen von $H^{(n)}$ und $H^{*(n)}$ wollen wir auch F_3 und F_3^* analytisch geben. Bezogen auf das durch die Leitgeraden g_1 und g_2 und die developpablen Elemente bestimmte Tetraeder, ergibt sich:

F_3:	F_3^*:
$(\varrho_2 x_2)^2 - \lambda (\varrho_3 x_3)^2 = 0$	$(\varrho_2 x_2)^2 - \lambda (\varrho_3 x_3)^2 = 0$
$\varrho_1 x_1 - \lambda \varrho_4 x_4 = 0$	$\varrho_1 x_1 + \lambda \varrho_4 x_4 = 0$
$(\varrho_2 x_2)^2 \varrho_4 x_4 - (\varrho_3 x_3)^2 \varrho_1 x_1 = 0$	$(\varrho_2 x_2)^2 \varrho_4 x_4 + (\varrho_3 x_3)^2 \varrho_1 x_1 = 0$
oder $x_2^2 x_4 - k x_3^2 x_1 = 0$	$x_2^2 x_4 + k x_3^2 x_1 = 0$.

Jeder Wert von k gibt eine Fläche des früher besprochenen Büschels. Transformieren wir wie oben auf unser kartesisches Koordinatensystem, so erhalten wir:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2\left(1+\frac{z}{c}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2\left(1-\frac{z}{c}\right)=0 \qquad \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2\left(1+\frac{z}{c}\right)+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2\left(1-\frac{z}{c}\right)=$$

$$(F_3)\quad \underline{\underline{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c}=2\,\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}}} \qquad (F_3^*)\quad \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\,\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c}}}$$

$a=b$ gesetzt

$$\text{(Zylindroid)}\quad (x^2+y^2)\,z=2\,c\,x\,y \qquad\qquad (x^2+y^2)\,c=2\,x\,y\,z$$

Die Projektionen unserer Kurven sind reich an Singularitäten; verweilen wir darum noch einen Moment bei ihnen.

Die erste Projektion von $R_4^{(n)}$ ist eine Kurve mit einem reellen und zwei imaginären Inflexionsknoten.

Zufolge der Parameterdarstellung von $R_4^{(0)}$ gilt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{\lambda^3+\lambda}{\lambda^4+1}\right)^2+\left(\frac{\lambda^3-\lambda}{\lambda^4+1}\right)^2=\frac{2\,\lambda^2}{\lambda^4+1}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{4\,\lambda^4}{(\lambda^4+1)^2}$$

$$\text{(1. Projektion von } R_4^{(0)})\qquad \underline{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$a=b$ gesetzt

$$\text{(Lemniskate)}\qquad (x^2+y^2)^2=a^2\,(x^2-y^2)\,.$$

Die zweite Projektion von $R_4^{(n)}$ hat zwei Undulationen und einen isolierten Inflexionsknoten.

$$\frac{z}{c}=\frac{\lambda^4-1}{\lambda^4+1}\,; \qquad \lambda=\sqrt[4]{\frac{c+z}{c-z}}\,; \qquad \lambda^4+1=\frac{2\,c}{c-z}\,.$$

$$\frac{x}{a}=\frac{\lambda\,(\lambda^2+1)}{\lambda^4+1}=\frac{\sqrt{c+z}+\sqrt{c-z}}{\sqrt{c-z}}\sqrt[4]{\frac{c+z}{c-z}}:\frac{2\,c}{c-z}$$

$$=\frac{(\sqrt{c+z}+\sqrt{c-z})\sqrt[4]{c^2-z^2}}{2\,c}$$

$$\frac{4\,c^2\,x^2}{a^2} = (2\,c + 2\sqrt{c^2 - z^2})\sqrt{c^2 - z^2}$$

$$\frac{2\,c^2\,x^2}{a^2} - c^2 + z^2 = c\sqrt{c^2 - z^2}$$

(2. Projektion von $R_4^{(0)}$) $$\underline{\left(\frac{2\,x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)^2 = 1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

$a = c$ gesetzt

$$(2\,x^2 + z^2 - c^2)^2 = c^2\,(c^2 - z^2).$$

Analog erhalten wir die dritte Projektion von $R_4^{(n)}$, eine Kurve mit zwei Undulationen und einem Inflexionsknoten in O.

(3. Projektion von $R_4^{(0)}$) $$\underline{\left(\frac{2\,y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1\right)^2 = 1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

$b = c$ gesetzt

$$(2\,y^2 - z^2 + c^2)^2 = c^2\,(c^2 - z^2).$$

$D_4^{(0)}$ hat dieselbe Parameterdarstellung wie $R_4^{(0)}$, nur vertauschen sich die unendlich ferne Ebene und die $x\,y$-Ebene, also

$$(D_4^{(0)}) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a^*} = \frac{x}{a\sqrt{2}} &= \frac{\lambda\,(\lambda^2 + 1)}{\lambda^4 - 1} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \\ \frac{y}{b^*} = \frac{y}{b\sqrt{2}} &= \frac{\lambda\,(\lambda^2 - 1)}{\lambda^4 - 1} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \\ \frac{z}{c} &= \frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1}. \end{aligned}$$

Vertauschen wir auch noch die $x\,z$- und die $y\,z$-Ebene, so erhalten wir die Parameterdarstellung von $V_4^{(n)}$

$$(V_4^{(n)}) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{2^n\,a} &= \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \\ \frac{y}{2^n\,b} &= \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \\ \frac{z}{c} &= \frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1}. \end{aligned}$$

Endlich lautet die Parameterdarstellung von $U_4^{(n)}$

$$(U_4^{(n)}) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a\,(\sqrt{2})^{2n+1}} &= \frac{\lambda^3 - \lambda}{\lambda^4 + 1} \\ \frac{y}{b\,(\sqrt{2})^{2n+1}} &= \frac{\lambda^3 + \lambda}{\lambda^4 + 1} \\ \frac{z}{c} &= \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^4 + 1}. \end{aligned}$$

Die erste Pojektion von $D_4^{(n)}$ ist eine Kurve mit drei Inflexionsknoten; einer ist im Nullpunkt, einer im Unendlichen der x-Achse und der dritte, isolierte, im Unendlichen der y-Achse.

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} = \frac{2\lambda^2}{\lambda^4 - 1}; \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\,\frac{4\lambda^4}{(\lambda^4 - 1)^2}$$

(1. Projektion von $D_4^{(0)}$)

$$2\,\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$a = b$ gesetzt

$$2\,x^2 \cdot y^2 = a^2\,(x^2 - y^2).$$

Die zweite Projektion von $D_4^{(n)}$ hat zwei Undulationen und einen isolierten Inflexionsknoten im Unendlichen der z-Achse.

(2. Projektion von $D_4^{(0)}$)

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$a = c$ gesetzt

$$(x^2 - z^2 + c^2)^2 = z^2\,(z^2 - c^2).$$

Die dritte Projektion von $D_4^{(n)}$ hat zwei Undulationen und im Unendlichen einen Inflexionsknoten.

(3. Projektion von $D_4^{(0)}$)

$$\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$b = c$ gesetzt

$$(y^2 + z^2 - c^2)^2 = z^2\,(z^2 - c^2).$$

Am Schlusse dieses Abschnittes möchten wir noch untersuchen, in was für Punktegruppen $R_4^{(n)}$ von den Tangentialebenen der Polarenfläche geschnitten wird.

Das Ebenenbüschel einer beliebigen Erzeugenden a von F_3 schneidet, weil a zugleich Bisekante von R_4 ist, aus dieser Kurve eine Punkteinvolution mit den auf a liegenden Kurvenpunkten als Doppelelemente; somit haben wir tatsächlich in jeder Ebene des Büschels vier harmonische Punkte von R_4. Jedes Paar der Involution liefert eine Erzeugende der Regelfläche 3. Grades, von welcher a die Doppelgerade und a^*, die Polare von a bezüglich H, die einfache Leitgerade ist. Es sind also die durch a^* gehenden Tangentialebenen von F_3^* Doppeltangentialebenen der erzeugten Regelfläche; also gilt:

Jede Kurve des Büschels wird von den Tangentialebenen der Regelfläche, von welcher sie Haupttangentenkurve ist, in harmonischen Punkten geschnitten, während jede Ebene einer Erzeugenden der Polarenfläche aus der Kurve je zwei Paare einer Involution schneidet, deren Doppelelemente durch die Schnittpunkte der Polaren genannter Erzeugenden mit der Kurve repräsentiert werden.

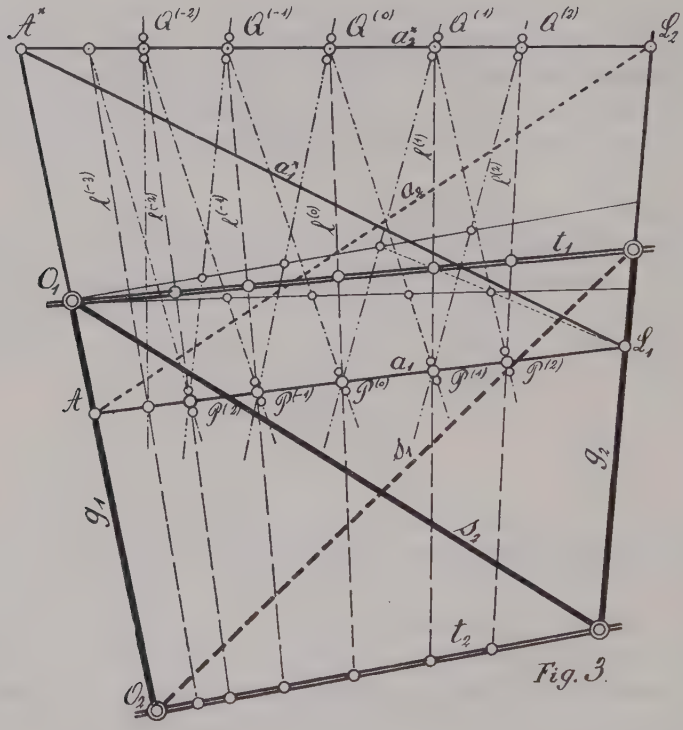
IV. Die Hyperboloide der Haupttangenten von F_3 und F_3^*.

Die Haupttangenten der Regelfläche 3. Grades in den Punkten einer Erzeugenden bilden, wie bekannt, ein Hyperboloid Nun gilt es, die gegenseitige Beziehung dieser Hyperboloide von F_3 und F_3^* zu erörtern, um daraus bei der graphischen Darstellung des Kurvenbüschels Nutzen zu ziehen.

Zunächst erwähnen wir, dass uns das durch die stationären Tangenten t_1 und t_2 und durch die Leitgeraden g_1 und g_2 bestimmte Tetraeder auf zwei geschart involutorische Raumtransformationen aufmerksam macht, die sich von den früher besprochenen Transformationen wesentlich unterscheiden. *t_1 und t_2 und dann s_1 und s_2, die andern durch die Streckungspunkte gehenden, allen Hyperboloiden, welche Haupttangentenkurven von F_3 und F_3^* tragen, gemeinsamen Erzeugenden, sind die Achsen zweier geschart*

involutorischer Räume, in denen sich H^n *und* $H^{*(n)}$ *selbst und* F_3 *und* F_3^*, *dann* $R_4^{(n)}$ *und* $V_4^{(n)}$ *und endlich* $D_4^{(n)}$ *und* $U_4^{(n)}$ *vertauschbar entsprechen.*

a_1 und a_2 von F_3 und a_2^* und a_1^* von F_3^* bestimmen ein Haupttetraeder des Kurvenbüschels (Fig. 3). Ist dann $P^{(0)}$ ein auf a_1 liegender Punkt von $R_4^{(0)}$, so trifft die Tangente von $P^{(0)}$



bezüglich $R_4^{(0)}$ die Gerade a_2^* in einem der Kurve $V_4^{(-1)}$ angehörenden Punkte $Q^{(-1)}$, während durch $P^{(0)}$ die Tangente des wieder auf a_2^* liegenden Punktes $Q^{(1)}$ von $V_4^{(1)}$ geht und die Erzeugende $l^{(0)}$ von $H^{(0)}$ die Gerade a_2^* in $Q^{(0)}$ von $V_4^{(0)}$ trifft; $Q^{(0)}$ schickt dann seine Tangente nach $P^{(-1)}$ von $R_4^{(-1)}$ und enthält die Tangente von $P^{(1)}$ bezüglich $R_4^{(1)}$. $P^{(-1)}\,Q^{(-1)}$ ist die Erzeugende $l^{(-1)}$ von $H^{(-1)}$ und $P^{(1)}\,Q^{(1)}$ gehört als $l^{(1)}$ der Fläche $H^{(1)}$ an. Durch die Transformation der Achsen t_1 und t_2 vertauschen sich a_1 und a_2 mit

a_2^* und a_1^* resp., also wird F_3 zu F_3^* und umgekehrt. $l^{(n)}$ gehört als sich selbst entsprechende Gerade dem geschart involutorischen Raume an, somit vertauschen sich $P^{(n)}$ und $Q^{(n)}$. $H^{(n)}$ entspricht sich selbst, während wir zwischen $R_4^{(n)}$ und $V_4^{(n)}$ involutorisches Entsprechen haben. Dasselbe gilt von $H^{*(n)}$ mit $D_4^{(n)}$ und $U_4^{(n)}$. Analoges ist vom geschart involutorischen Raume der Achsen s_1 und s_2 zu sagen.

Die Haupttangenten $P^{(n)} Q^{(n-1)}$ von F_3 in den Punkten von a_i bilden ein Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(a_1)}$, dem g_1, g_2, a_1 und a_2^* angehören; durch die nämlichen vier Geraden geht das Hyperboloid $\mathfrak{H}^{(a_2^*)}$ der Haupttangenten $Q^{(n)} P^{(n-1)}$ von F_3^* in den Punkten von a_2^*. $\mathfrak{H}^{(a_1)}$ *und* $\mathfrak{H}^{(a_2^*)}$ *entsprechen sich involutorisch* in den genannten zwei Transformationen, desgleichen $\mathfrak{H}^{(a_2)}$ und $\mathfrak{H}^{(a_1^*)}$. Ferner erkennen wir, dass $\mathfrak{H}^{(a_1)}$ und $\mathfrak{H}^{(a_2)}$ von F_3 sich ausser in g_1 und g_2 in zwei Geraden m_1 und m_2 schneiden, die einzeln in den Doppelebenen des involutorischen Ebenenbüschels g_1 liegen; denn beide Gerade entsprechen sich vertauschbar in allen früher besprochenen Transformationen. Gleiches gilt von $\mathfrak{H}^{(a_1^*)}$ und $\mathfrak{H}^{(a_2^*)}$ von F_3^*. Aus demselben Grunde liegen die Schnittgeraden von $\mathfrak{H}^{(a_1)}$ und $\mathfrak{H}^{(a_1^*)}$ und dann wieder von $\mathfrak{H}^{(a_2)}$ und $\mathfrak{H}^{(a_2^*)}$ einzeln in den Ebenen der developpablen Elemente von F_3 und F_3^*.

Angenommen, b_1 und b_2 seien ein weiteres Paar Erzeugender von F_3, deren Polarkonjugierte bezügl. H wir b_2^* und b_1^* resp. heissen; *dann schneidet* $\mathfrak{H}^{(a_1)}$ *die Ebene* $b_1 b_2$ *in einer Geraden* λ *und* $\mathfrak{H}^{(a_1^*)}$ *die Ebene* $b_2^* b_1^*$ *in einer Geraden* λ^*, *die sich notwendig auf* g^2 *schneiden*. Dasselbe gilt von μ, der Schnittgeraden von $\mathfrak{H}^{(a_1^*)}$ mit $b_1 b_2$ und von μ^*, der Schnittlinie von $b_1^* b_2^*$ mit $\mathfrak{H}^{(a_1)}$. Wir kennen nämlich drei Paare der Ebeneninvolution g_2, für welche diese Behauptung zutrifft; es sind dies die beiden Doppelebenen, wo, wie oben schon gezeigt wurde, die zwei Schnittgeraden je zusammenfallen und dann das Ebenenpaar $a_1 a_2$, $a_2^* a_1^*$; also gilt sie auch für das beliebige Paar $b_1 b_2$, $b_2^* b_1^*$ der genannten Involution. Von dieser Erkenntnis werden wir bei der Konstruktion der Tangenten an $D_4^{(0)}$ Gebrauch machen.

V. Graphische Darstellung des Kurvenbüschels mit reellen stationären Tangenten.[1])

Nach den Erörterungen der vorigen Abschnitte gestaltet sich die graphische Darstellung des Kurvenbüschels sehr einfach. (Tafel I.)

Als F_3 wählen wir das *orthogonale Zylindroid* und legen durch die developpablen Elemente derart ein Hyperboloid, dass es die Doppelgerade g_1 zur z-Achse hat. Wir begnügen uns mit der ersten Projektion, die wir mit Hilfe der die Leitellipse enthaltenden Fixebene $H_{x'}$ konstruieren. Der Einfachheit halber machen wir die x-Achse von H gleich der z-Achse; dadurch wird H zum Rotationshyperboloid, dessen umgelegten Querschnitt mit der xz-Ebene wir mit (K) bezeichnet haben. Eine Horizontalebene schneidet aus F_3 zwei Erzeugende und aus H eine gleichseitige Hyperbel, deren Scheitel wir mit Hilfe von (K) sofort erhalten, so dass wir ihre Schnittpunkte mit den Erzeugenden von F_3 in einfacher Weise nach der Methode der Zyklographie gewinnen. Die gleichseitige Hyperbel mit dem Zentrum O (Fig. 4) und der Scheiteltangente s denken wir uns als umgeklappte Schnittkurve der durch s gelegten Vertikalebene E mit dem gleichseitigen Kegel S. Die auf der Erzeugenden e liegenden Kurvenpunkte erhalten wir, indem wir durch den Schnittpunkt von e mit s die zu x Parallele m ziehen, wodurch wir die beiden Geraden g_1 und g_2 des Kegels gewinnen, deren Schnittpunkte mit E durch die Umklappung auf e zu liegen kommen. Die Schmiegungsebenen und Tangenten von $R_4^{(0)}$ erhalten wir, indem wir die Tangentialebenen und die Haupttangenten dieser Punkte bezüglich F_3 konstruieren. Die Tangentialebene P eines Punktes

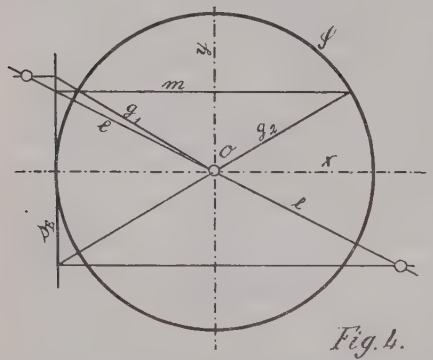


Fig. 4.

[1]) Vgl. Fiedler, Darstellende Geometrie, Bd. II, § 60. Hier ist R_4 mit zwei stationären Tangenten dargestellt als Durchdringung eines Zylindroids mit einem Hyperboloid, das die Doppelgerade und zwei Haupttangenten des Zylindroids enthält.

P von F_3 gewinnen wir, indem wir durch P' eine Parallele zur Tangente an $H'_{x'}$ in A' ziehen (Fig. 5); durch den gewonnenen Punkt Q geht die zur Erzeugenden e parallele Spur s der Tangentialebene P, die aus F_3 den Kegelschnitt K schneidet, dessen Tangente in P die Haupttangente von F_3 in diesem Punkte ist.[1]) Die Gesamtheit der Spurpunkte S der Tangenten von $R_4^{(0)}$ bildet die von den s eingehüllte Spur der Developpablen von $R_4^{(0)}$.

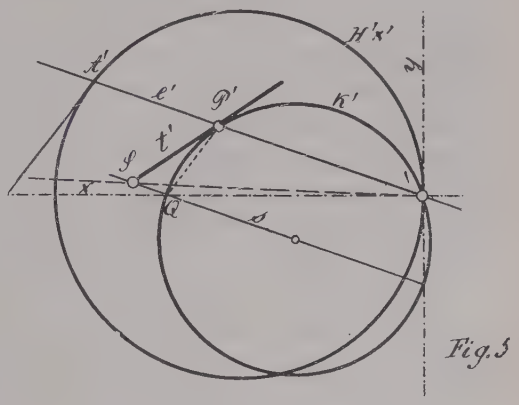


Fig. 5

Um die *Doppelkurve* $D_4^{(0)}$ zu erhalten, bilden wir nach E. Weyr[2]) $R_4^{(0)}$ auf den Kegelschnitt $H'_{x'}$ ab, indem wir festsetzen, dass von den beiden auf einer Erzeugenden von F_3 liegenden Kurvenpunkten der linksliegende sein Bild im Schnittpunkt der Erzeugenden mit $H'_{x'}$ habe, während das des rechtsliegenden symmetrisch zu vorigem bezüglich des zur y-Achse parallelen Durchmessers liege; dann konstruieren wir den „Direktionskegelschnitt“ D, dessen Tangenten nach Weyr aus $H'_{x'}$ je zwei Punkte schneiden, deren Originale Tangenten nach demselben Punkte der Doppelkurve senden. In den Bildern der Streckungspunkte wird D von $H'_{x'}$ berührt; dann kennen wir die Punkte von $R_4^{(0)}$, deren Tangenten sich im Unendlichen treffen; ihre Bilder werden von den Asymptoten von D herausgeschnitten. Dadurch ist D bestimmt, und wir erhalten sofort die zwei Kurvenpunkte P_1 und P_2 (Tafel I), deren Tangenten die Tangente von P schneiden, wenn wir aus dem Bilde (P) von P die zwei Tangenten an D bestimmen und uns auf jeder den zweiten Schnittpunkt (P_1 und P_2 resp.) mit $H'_{x'}$ merken.

Haben wir so einen Punkt von $D_4^{(0)}$, z. B. $\mathfrak{B}$ auf e^* von F_3^* als Schnitt der Tangenten von B und B_1 erhalten, so haben wir

[1]) Fiedler, Darstellende Geometrie, Bd. II, § 51.
[2]) E. Weyr, Wiener Berichte, Bd. 72, Dez. 1875.

noch seine *Tangente* zu konstruieren. Da erinnern wir uns, dass die Spur des hyperbolischen Paraboloids der Haupttangenten von e^* bezüglich F_3^* mit der unendlich fernen Ebene und der Schnitt s des Haupttangentenparaboloids der Erzeugenden e von F_3, welche in der nämlichen Vertikalebene wie e^* liegt, mit der xy-Ebene nach dem nämlichen Punkte der unendlich fernen Leitgeraden g_2 gehen und dass auch die andern zwei Schnittgeraden der zwei Paraboloide mit den genannten Ebenen sich in g_2 schneiden. Demnach konstruieren wir zuerst die Haupttangente t eines beliebigen Punktes J der Erzeugenden e von F_3. Ihre Spur mit O verbunden, gibt s, hiezu die Parallele durch $\mathfrak{B}'$ liefert das Bild der gesuchten Tangente, deren Spur mit der xy-Ebene wir im Schnittpunkt mit der zu t parallel gezogenen Geraden s^* erhalten.

Die *Asymptoten* von D_4 haben dieselbe Richtung wie die im Unendlichen sich schneidenden Tangenten von $R_4^{(0)}$. Nun schneidet jede zur x-Achse resp. y-Achse parallele Vertikalebene aus F_3^* eine Hyperbel, deren nichtvertikale Asymptote Haupttangente eines unendlich fernen Punktes von F_3^* ist. Mit geringer Mühe bestimmen wir dann diejenige Vertikalebene, die aus F_3^* eine Hyperbel schneidet, deren nichtsenkrechte Asymptote die verlangte Richtung hat. Diese Gerade ist die gesuchte Asymptote von $D_4^{(0)}$ und die genannte Vertikalebene die zugehörige Asymptotenebene.

Die Punkte von $V_4^{(-1)}$ und $U_4^{(-1)}$ werden nach den diesbezüglichen Sätzen von Abschnitt II erhalten.

Die von den Schmiegungsebenen von $R_4^{(0)}$ aus F_3 geschnittenen Kegelschnitte sind die zweiten *Oskulanten* [1]) von $R_4^{(0)}$ und ihre Projektionen sind die zweiten Polaren der Projektionen von $R_4^{(0)}$. Auf unsern Tafeln sind die zweiten Polaren von $R_4^{(0)'}$, $D_4^{(0)'}$, $V_4^{(-1)'}$, $U_4^{(-1)'}$ resp. ähnlich, da sie jeweilen die nämlichen Punkte der unendlich fernen Geraden gemein haben.

VI. Kurvenbüschel mit imaginären stationären Tangenten.

R_4 mit zwei imaginären stationären Tangenten ist Haupttangentenkurve einer Regelfläche 3. Grades, welche keine reellen

[1]) Jolles, Theorie der Oskulanten, Aachen 1886.

developpablen Elemente besitzt. Die Ebeneninvolution der Doppelgeraden g_1 ist elliptisch; durch jeden Punkt der letztern gehen zwei reelle Erzeugende, von denen jede zwei reelle Punkte von R_4 enthalten muss, da g_1 keine solchen trägt, also H nicht trifft. Selbstverständlich sendet auch F_3^* aus jedem Punkte von g_1 zwei reelle Erzeugende. Beide Regelflächen haben nur je eine Schar von Haupttangentenkurven, $R_4^{(n)}$ und $V_4^{(n)}$. Die Scharen $D_4^{(n)}$ und $U_4^{(n)}$ wie auch ihre Hyperboloide $H^{*(n)}$ sind imaginär. Es reproduzieren also $R_4^{(n)}$ und $V_4^{(n)}$ *imaginäre Raumkurven 4. Ordnung II. Art mit imaginären stationären Tangenten,* während diese Kurven wieder reelle Doppelkurven mit denselben stationären Tangenten haben.

Durch kollineare Umformung können wir wieder die Doppelgerade g_1 und zwei in einem ihrer Punkte eintreffende Erzeugende zu Achsen von H machen; F_3 hat dann das Rechtwinkelpaar im Nullpunkt und F_3^* im Unendlichen. Allgemein schneidet jedes Hyperboloid, dessen Achse mit elliptischer Involution mit der Doppelgeraden von F_3 zusammenfällt, aus dieser Fläche eine Kurve 6. Ordnung. Legen wir jedoch H durch die developpablen Elemente von F_3, d. h. machen wir auf g_2 die Involution konjugierter Pole identisch mit der elliptischen Involution von F_3, und lassen wir auch auf der Doppelgeraden g_1 die Involution von H zusammenfallen mit derjenigen, die der Leitkegelschnitt von F_3 durch die Doppeltangentialebenen auf g_1 überträgt, so erhalten wir eine Kurve 4. Ordnung mit zwei imaginären stationären Tangenten.

Behufs *graphischer Darstellung* dieser Kurve haben wir eine Regelfläche 3. Grades gewählt, deren in $H_{x'}$ liegende Leitkurve zur 1. Projektion eine gleichseitige Hyperbel hat, welche Fläche also an Einfachheit und Symmetrie dem Zylindroid gleichkommt (Tafel II). Die Erzeugenden von F_3 und F_3^* bilden je eine Rechtwinkelinvolution. Jedes Rotationshyperboloid mit der Doppelgeraden g_1 von F_3 als Rotationsachse und dem Anfangspunkt unseres Koordinatensystems als Mittelpunkt, das die symmetrischen Punkte der Involution auf g_1 in den Horizontalebenen durch die symmetrischen Punkte der Involution auf der geneigten Achse des Leitkegelschnittes hat, schneidet aus F_3 und F_3^* je eine Haupttangentenkurve. Eines dieser Hyperboloide ist gleichseitig; dieses bringen wir mit F_3 zum Schnitt, indem wir mehrere horizontale Hülfsschnitte ausführen, um so in den Schnittpunkten des zu H ge-

hörenden Kreises mit den zwei Erzeugenden von F_3 die vier in der Ebene liegenden Punkte von $R_4^{(0)}$ zu erhalten. Die Tangenten werden in gleicher Weise gewonnen, wie in Tafel I; jede Tangentialebene schneidet aus F_3 eine Hyperbel, die sich als gleichseitige projiziert und deren Tangente im Berührungspunkte der Ebene Haupttangente von F_3, also zugleich Tangente von $R_4^{(0)}$ ist. Die Konstruktion ist für Punkt 8 ausgeführt. Die unendlich fernen Punkte von $R_4^{(0)}$ liegen in der H_z- resp. $H_{z'}$-Ebene, ihre Asymptotenebenen sind darum zu diesen Ebenen parallel und berühren $H^{(-1)}$ in der xy-Ebene. Die Tangentenfläche durchdringt sich nicht; sie umhüllt $H^{(-1)}$ in der Kurve V^{-1}, welche Haupttangentenkurve von F_3^* ist.

$R_4^{(0)}$, bezogen auf das Tetraeder der Doppelebenen der Involutionen von g_1 und g_2, hat dieselbe Parameterdarstellung wie früher, nur ist das Tetraeder imaginär.

$$\begin{aligned}
\varrho_2 x_2 + i\,\varrho_3 x_3 &= \lambda \\
\varrho_2 x_2 - i\,\varrho_3 x_3 &= \lambda^3 \\
\varrho_4 x_4 + i\,\varrho_1 x_1 &= 1 \\
\varrho_4 x_4 - i\,\varrho_1 x_1 &= \lambda^4 .
\end{aligned}$$

Auf unser kartesisches Koordinatensystem bezogen, erhalten wir

$$(R_4^{(0)}) \qquad \begin{aligned}
\frac{x}{a} &= \frac{\varrho_2 x_2}{\varrho_4 x_4} = \frac{\lambda^3 + \lambda}{\lambda^4 + 1} \\
\frac{y}{b} &= \frac{\varrho_3 x_3}{\varrho_4 x_4} = i\,\frac{\lambda^3 - \lambda}{\lambda^4 + 1} \\
\frac{z}{c} &= \frac{\varrho_1 x_1}{\varrho_4 x_4} = i\,\frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^4 + 1}
\end{aligned}$$

Lassen wir λ die reelle Zahlenreihe durchlaufen, so erhalten wir einzig mit $\lambda = \pm 1$ reelle Punkte von R_4 und zwar die auf der x-Achse liegenden. Mit den übrigen reellen λ gewinnen wir imaginäre Kurvenpunkte, speziell mit $\lambda = 0,\ \infty$ die auf der z-Achse liegenden Streckungspunkte. Damit jeder reelle Punkt von R_4 einen reellen Parameter besitze, führen wir eine neue Grösse μ ein, die mit λ durch die bilineare Relation

$$a\,\lambda\,\mu + b\,\lambda + c\,\mu + d = 0$$

verbunden ist. Setzen wir fest, dass mit $\lambda = 0, \infty, 1$ der neue Parameter μ die Werte $-i, i, 1$ erhalte, so wird vorige Gleichung zu

$$\lambda\mu - i\lambda + i\mu - 1 = 0$$

und $R_4^{(0)}$ erhält die Parameterdarstellung

$$(R_4^{(0)}) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{-2\mu(1+\mu^2)}{1-6\mu^2+\mu^4} \\ \frac{y}{b} &= \frac{1-\mu^4}{1-6\mu^2+\mu^4} \\ \frac{z}{c} &= \frac{4\mu(1-\mu^2)}{1-6\mu^2+\mu^4}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Projektionen von $R_4^{(n)}$ erhalten wir in der nämlichen Weise wie früher, am einfachsten durch Elimination von λ aus der ursprünglichen Parameterdarstellung.

Die erste Projektion von $R_4^{(n)}$ ist eine Kurve mit drei Inflexionsknoten, zwei sind im Unendlichen, der isolierte liegt in O.

(1. Projektion von $R_4^{(0)}$) $\qquad \underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}$

$a = b$ gesetzt

$$(x^2+y^2)\,a^2 = (x^2-y^2)^2.$$

Die zweite und die dritte Projektion von R_4 haben je zwei Knoten im Unendlichen, einen Inflexionsknoten in O und zwei imaginäre Undulationen ($z = \pm ic$, $x = 0$).

(2. Projektion von $R_4^{(0)}$) $\qquad \underline{\left(\frac{2x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{z^2}{c^2}}$

$a = c$ gesetzt

$$(2x^2 - z^2 - c^2)^2 = c^2(c^2+z^2).$$

(3. Projektion von $R_4^{(0)}$) $\qquad \underline{\left(\frac{2y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{z^2}{c^2}}.$

Die Parameterdarstellung von $V_4^{(0)}$ erhalten wir aus derjenigen von $R_4^{(0)}$, indem wir beachten, dass $V_4^{(0)}$ und $R_4^{(0)}$ entsprechende Gebilde im geschart involutorischen Raum der stationären Tangenten des Büschels sind. Also

$$(V_4^{(0)}) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{\lambda^3 - \lambda}{\lambda^4 - 1} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \\ \frac{y}{b} &= i\,\frac{\lambda^3 + \lambda}{\lambda^4 - 1} = i\,\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \\ \frac{z}{c} &= i\,\frac{\lambda^4 + 1}{\lambda^4 - 1} \end{aligned}$$

Setzen wir wieder

$$\lambda = i\,\frac{1 - i\mu}{1 + i\mu},$$

so erhalten wir für reelle Parameter reelle Koordinaten.

$$(V_4^{(0)}) \qquad \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{1 + \mu^2}{4\mu} \\ \frac{y}{b} &= \frac{1 + \mu^2}{2\,(1 - \mu^2)} \\ \frac{z}{c} &= -\,\frac{1 - 6\,\mu^2 - \mu^4}{4\mu\,(1 - \mu^2)}\,. \end{aligned}$$

Die erste Projektion von $V_4^{(0)}$ hat die Gleichung

(1. Projektion von $V_4^{(0)}$)

$$\underline{4\,\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

$a = b$ gesetzt

$$4\,x^2\,y^2 = a^2\,(x^2 + y^2)\,.$$

Und für die zweite Projektion von $V_4^{(0)}$ gilt:

$$\underline{\left(\frac{2\,x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{z^2}{c^2} + 1\right)}$$

$a = c$ gesetzt

$$(2\,x^2 - z^2 - c^2)^2 = z^2\,(z^2 + c^2).$$

Die analytische Darstellung von F_3 und F_3^* erhalten wir folgenderart:

$$\begin{aligned} &(\varrho_2\,x_2 - i\,\varrho_3\,x_3)^2 - \lambda\,(\varrho_2\,x_2 + i\,\varrho_3\,x_3)^2 = 0 \\ &\underline{(\varrho_4\,x_4 - i\,\varrho_1\,x_1) \;- \lambda\,(\varrho_4\,x_4 + i\,\varrho_1\,x_1) = 0} \end{aligned}$$

$$(\varrho_2\,x_2 - i\,\varrho_3\,x_3)^2\,(\varrho_4\,x_4 + i\,\varrho_1\,x_1) - (\varrho_2\,x_2 + i\,\varrho_3\,x_3)^2\,(\varrho_4\,x_4 - i\,\varrho_1\,x_1) = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} - i\,\frac{y}{b}\right)^2\left(1 + i\,\frac{z}{c}\right) - \left(\frac{x}{a} + i\,\frac{y}{b}\right)^2\left(1 - i\,\frac{z}{c}\right) = 0$$

(F_3) $$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c} = \frac{2xy}{ab}$$

$a = b$ gesetzt

$$(x^2 - y^2)\,z = 2cxy.$$

(F_3^*) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -\frac{2xyz}{abc}$$

$a = b$ gesetzt

$$(x^2 - y^2)\,c = -2xyz.$$

Für die Hyperboloide $H^{(n)}$ mit $R_4^{(n)}$ und $V_4^{(n)}$, oder eingehüllt von R_4^{n+1} und V_4^{n+1}, gilt:

$(H^{(n)})$ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (-2)^{2n}\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right).$$

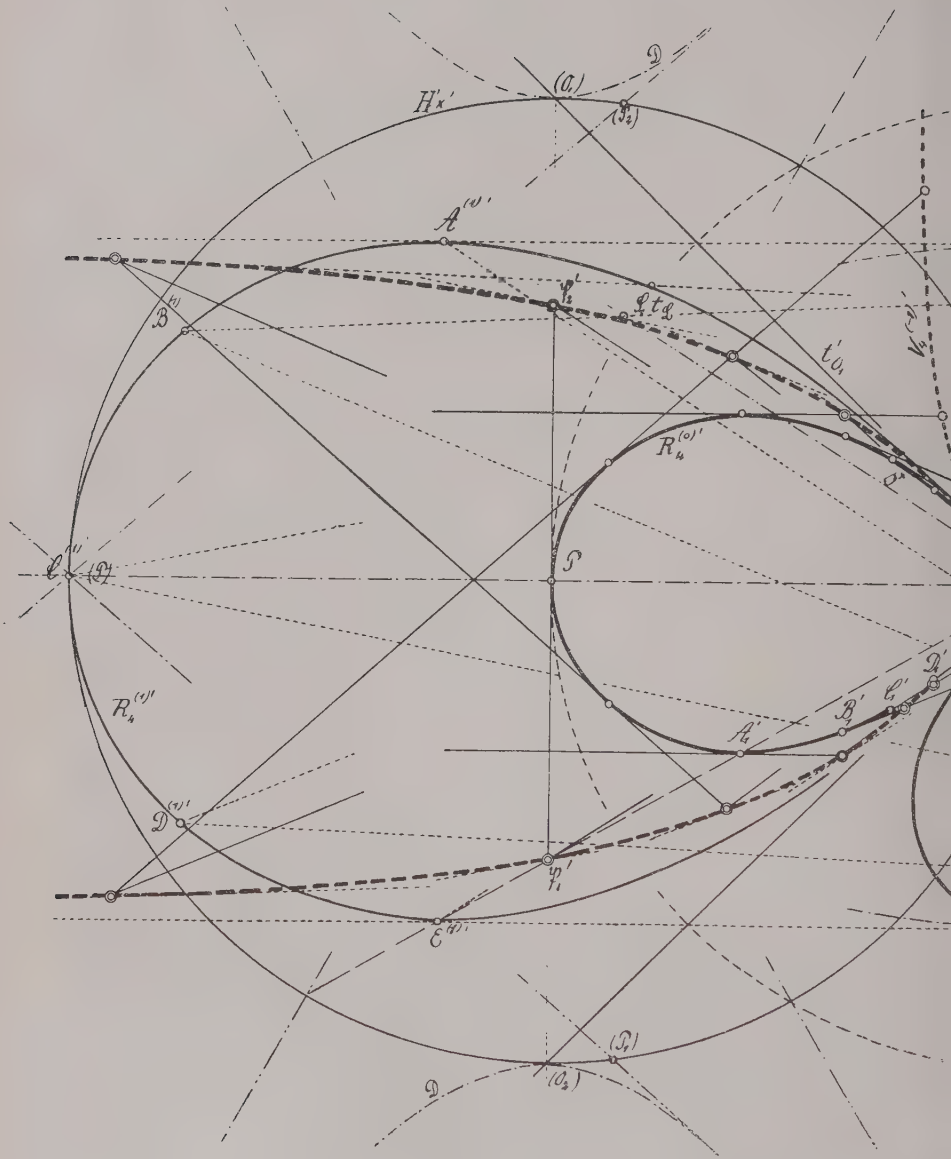
Und endlich erhalten wir für die Hyperboloide $H^{*(n)}$ mit den imaginären $D_4^{(n)}$ und $U_4^{(n)}$

$(H^{*(n)})$ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (-2)^{2n+1}\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)$$ (imaginär).

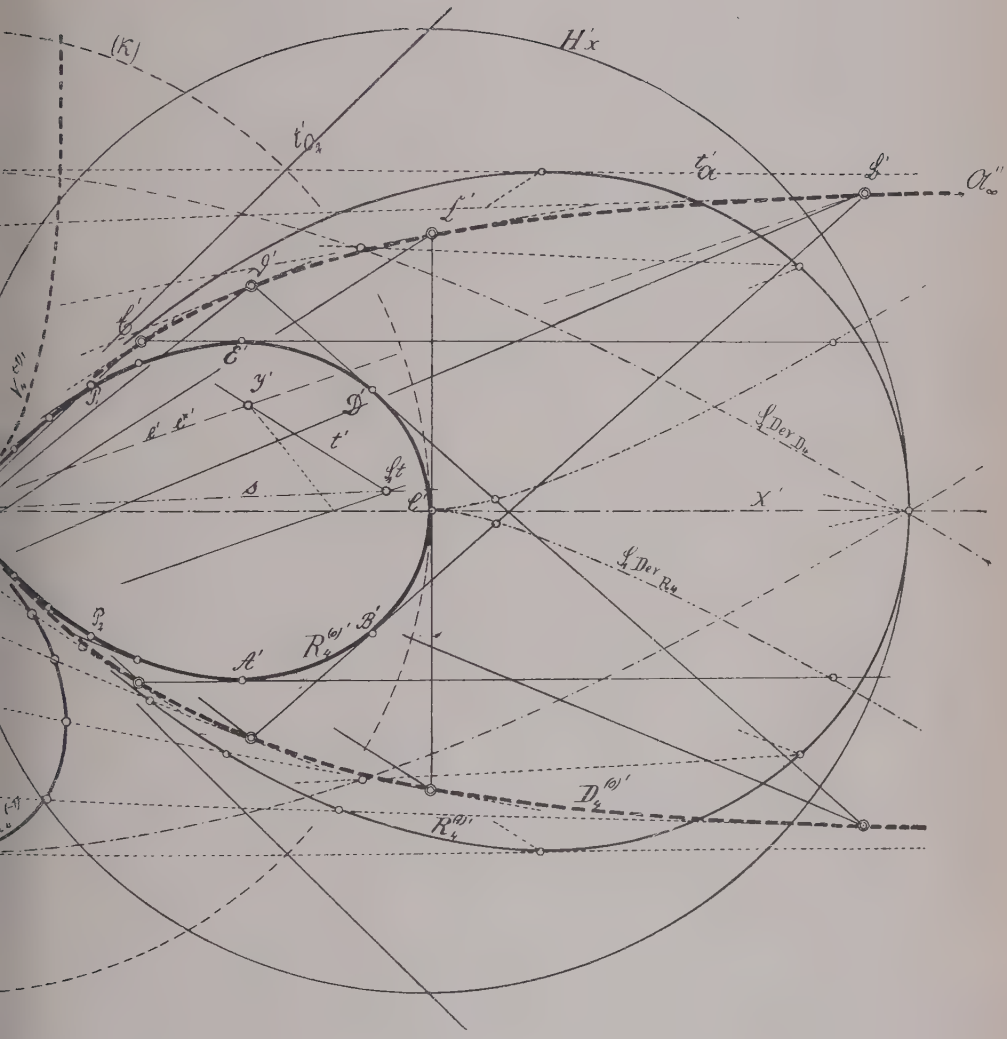
Die Anregung zu vorliegender Arbeit verdanke ich meinem lieben Lehrer

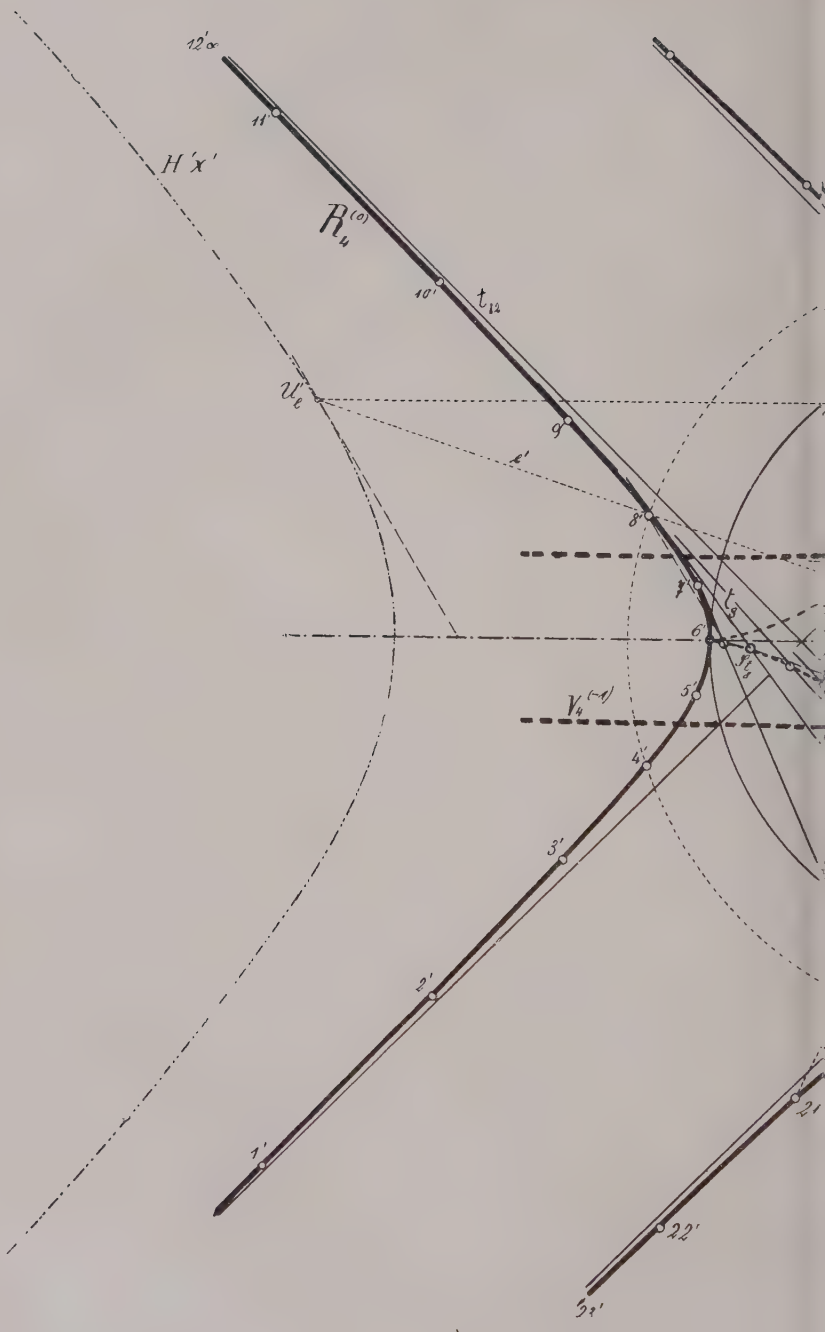
Herrn Professor Dr. W. Fiedler.

Gerne spreche ich ihm auch an dieser Stelle für die mir während der Ausführung zuteil gewordenen Ermunterungen, wie auch für das mir gütigst zugestellte Quellenmaterial meinen wärmsten Dank aus.

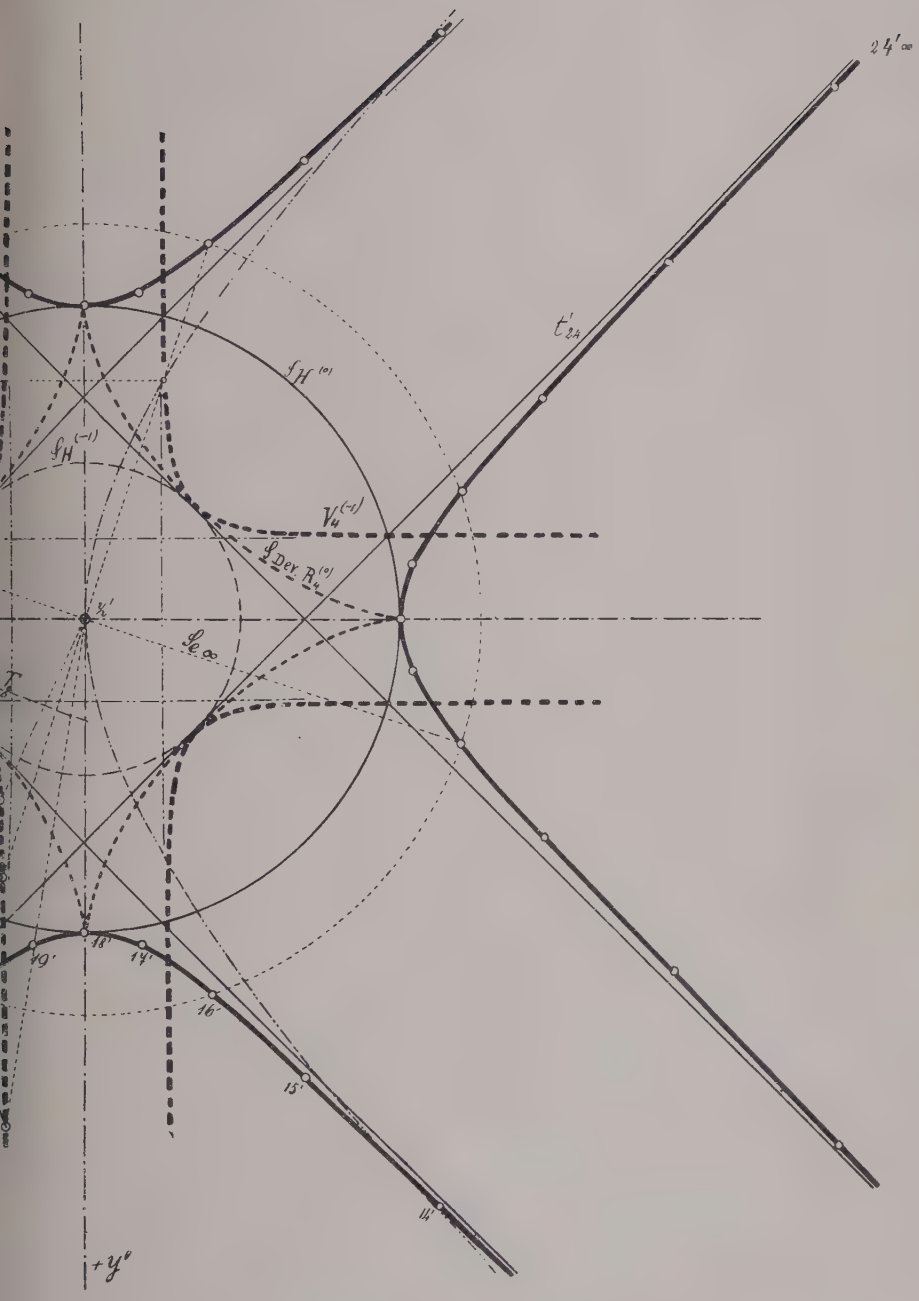

H'x'
(A1)
(S2)
A(1)'
B(1)
p2'
t'0
R4(0)'
S'
S
R4(1)'
A1'
B1'
C1'
D1'
D(1)'
p1'
C(1)'
(S1)
(S3)

Tafel I.




12'∞
11'
H'x'
$R_4^{(0)}$
10'
t_{12}
U_e'
9'
8'
7'
V_3
6'
$V_4^{(-1)}$
5'
4'
3'
2'
1'
21'
22'
23'

Tafel II.


24'∞
t'_{24}
$f_H^{(0)}$
$f_H^{(-1)}$
$V_4^{(-1)}$
$\mathfrak{L}_{\text{Der}}\, R_4^{(0)}$
x_4'
$\mathfrak{L}_\infty$
T_4
19'
18'
14'
16'
15'
11'
$+y^0$